数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 131-135

The calculation of the McKay-Thompson series for a 4A element of the Monster based on a new frame

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences,University of Tokyo
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

本稿では, $\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の符号に関するムーンシャイン加群の分解を与え、それを用いたモンスター単純群の共役類 $4A$ の Mckay-Thompson 級数の明示的な表示を与える. 詳細は [Sh] をご覧頂きたい. 頂点作用素代数の一般論は [Bo, FLM, MN], $\mathbb{Z}_6$ 上の符号に関する基本的な定義等は [BDHO, DHS] を参照した.

頂点作用素代数 (VOA) の公理は Borcherds, Frenkel らによって与えられて, 研究されてきた. 特にムーンシャイン加群 ($V^\natural$) は, VOA の最も重要な例の一つであり, その自己同型群はモンスター単純群である. $V^\natural$ は, 部分頂点作用素代数 (部分 VOA) として中心電荷 1/2 のヴィラソロ VOA $L(1/2,0)$ の 48 個のコピーのテンソル積を含んでいて, その加群としての $V^\natural$ の既約分解を用いて, $V^\natural$ の構造について研究がなされている ([DGH]).

$L(1/2,0)$ は中心電荷 1/2 の W_2 代数であるので, W_n 代数のユニタリ系列の最初元について, 同様の考察をするべきである ([Ma]). 本稿では特に, 中心電荷 1 の W_4 代数について考える.

ノルム 6 の元で生成される一次元格子 L から構成される格子 VOA を V_L とする. 中心電荷 1 の W_4 代数は格子 L の自己同型 -1 から誘導される V_L の自己同型の固定部分空間 V_L^+ として実現される. [DN] より, 既約 V_L^+-加群は

$$\{V_L^{\pm},V_{\alpha/2+L}^{\pm},V_{\alpha/3+L},V_{\alpha/6+L},V_L^{T_i,\pm}|i=0,1\}$$

の 10 個のいずれかと同型である.

V_Λ^+ をリーチ格子 Λ から構成される格子 VOAV_Λ の Λ の自己同型 -1 から誘導される V_Λ の自己同型の固定部分空間として, $V_\Lambda^{T,+}$ を V_Λ の twisted 加群 V_Λ^T の位数 2 の自己同型による固定部分空間としたときに, ムーンシャイン加群は $V^\natural=V_\Lambda^+\oplus V_\Lambda^{T,+}$ として構成される

Λ の部分集合で，24 個の互いに直交するノルム 6 の元たちの ± 1 倍した集合を 6-frame と呼ぶことにする．6-frame を考えることで，V_Λ^+ は部分 VOA として V_L^+ の 24 個のコピーのテンソル積を含むことがわかる．また，$V^\natural$ の $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群としての分解は直接計算できる．その表示は $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の符号を用いると見やすくなる．

Λ の自己同型群は 6-frame の集合上に作用するので，その軌道により同値類を定め，$\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号の集合上に座標の置換と任意の成分の -1 倍で移りあうの符号を同値として同値類を定める．符号から格子を構成する Construction A を $\mathbb{Z}_6$ 上に拡張した対応を考えることで次の命題を得る．

命題 1. *6-frame* の同値類と $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の *extremal Type II* 符号の同値集合との間に一対一対応がある．

次が主定理である．

定理 2. C を $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の *extremal Type II* 符号として，$C_2 = \{(c_1, \ldots, c_{24}) \in C | c_i = 0 \pmod{k} \text{ for all i}\}$ と置き，二進符号と見る．

(1) 部分 *VOA* としての次のような埋め込みが存在する．

$$V^\natural \supset V_\Lambda^+ \supset (V_L^+)^{\otimes 24}.$$

(2) V_Λ^+ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される：

$$V_\Lambda^+ \cong \bigoplus_{c \in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = +}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2+L}^{e_i} \oplus \frac{1}{2} \bigoplus_{c \in C \setminus C_2} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2k+L}.$$

(3) $V_\Lambda^{T,+}$ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される：

$$V_\Lambda^{T,+} \cong \bigoplus_{c \in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = -}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_L^{T_{c_i}, e_i}.$$

この定理の応用としてモンスター単純群の共役類 $4A$ の McKay-Thompson 級数の明示的な表示を与える．

V_L^+ のフュージョン規則は [Ab] で決定されている．それを用いて次のような命題を得る (cf. [Ma])．

命題 3. V_L^+ のフュージョン代数上で

$$\begin{aligned} 1 \quad &\text{on} \quad \{V_L^\pm, V_{\alpha/3+L}\}, \\ -1 \quad &\text{on} \quad \{V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{\alpha/6+L}\}, \\ \sqrt{-1} \quad &\text{on} \quad \{V_L^{T_0,\pm}\}, \\ -\sqrt{-1} \quad &\text{on} \quad \{V_L^{T_1,\pm}\} \end{aligned}$$

により定義される線形写像は自己同型である．

Γ を V_L^+ の既約加群全体の集合として,

$$V^\natural = \bigoplus_{(W_1,\ldots,W_{24})\in\Gamma^{24}} m_{W_1,\ldots,W_{24}} W_1 \otimes \cdots \otimes W_{24}$$

のような既約分解が与えられたとする.

各既約加群上に、テンソル積の i 番目の V_L^+ 加群に対応するスカラー倍 (cf. **命題** 3) をする $V^\natural$ の線形写像を σ_i と置く. すると, σ_i はフュージョン積を保つので次のような命題を得る.

命題 4. σ_i は $V^\natural$ の位数 4 の *VOA* としての自己同型である.

注意 5. ([Ma]) σ_i は共役類 $4A$ に属している.

リーチ格子の 6-frame の例を一つ与える. Q を $\mathbb{F}_{23}$ の平方剰余の集合として, $Q_i = \{i+j \in \mathbb{F}_{23} | j \in Q\}$ と置く. 簡単な計算により, 次の命題を得る.

命題 6. i, j を $\mathbb{F}_{23}$ の異なる元とする.

(1) $|Q_i \cap Q_j| = 5$.
(2) 次のうちの丁度一つが成立する:
 (I) $i \in Q_j$, (II) $j \in Q_i$.

次のような二進 Golay 符号の生成元を考える (cf. [CS]):

$$\begin{aligned} A_1 &= \Omega, \\ A_i &= \{1\} \cup \{2+j | j \in Q_{i-2}\}, \ (i = 2, \cdots, 24), \end{aligned}$$

ただし, $\{2+j | j \in Q_{i-2}\}$ は Ω の部分集合とみなす. 命題 6 より, 次のような命題を得る.

命題 7.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\alpha_\Omega + \alpha_1, \\ x_i &= -\frac{1}{2}\alpha_{A_i} + \frac{1}{4}\alpha_\Omega + \alpha_i, \ (i = 2, \cdots, 24) \end{aligned}$$

としたとき, $\{\pm x_1, \ldots, \pm x_{24}\}$ は *6-frame.*

対応する $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の etremal Type II 符号を用いて, $V^\natural$ の分解を考える.

$$\begin{aligned} a_i &= \mathrm{ch} V_{i\alpha/2k+L} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{3(j+i/2k)^2} \ (0 \le i \le 3), \\ b &= (\mathrm{ch} V_L^+ - \mathrm{ch} V_L^-) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{j^2} \end{aligned}$$

と置く．命題 4 で得られた $4A$ 元に対応する McKay-Thompson 級数を考えて次を得る．

$$
\begin{aligned}
T_{4A}(q) &= \frac{1}{2}a_0^{24} + \frac{1}{2}b^{24} - \frac{1}{2}a_3^{24} + 24a_2^{24} - 24a_1^{24} \\
&+ \frac{253}{2}a_0^{16}a_3^{8} - \frac{253}{2}a_0^{8}a_3^{16} + 2024a_0^{15}a_2^{9} - 2024a_1^{9}a_3^{15} \\
&+ 4048a_0^{7}a_2^{9}a_3^{8} - 4048a_0^{8}a_1^{9}a_3^{7} + 6072a_0^{4}a_2^{12}a_3^{8} - 6072a_1^{4}a_2^{8}a_3^{12} \\
&+ 6072a_0^{12}a_1^{8}a_2^{4} - 6072a_0^{8}a_1^{12}a_3^{4} + 6072a_1^{2}a_2^{16}a_3^{6} - 6072a_0^{6}a_1^{16}a_2^{2} \\
&+ 6072a_1^{8}a_2^{16} - 6072a_1^{16}a_2^{8} + 8096a_0^{13}a_1^{6}a_2^{3}a_3^{2} - 8096a_0^{2}a_1^{3}a_2^{6}a_3^{13} \\
&+ 12144a_0^{3}a_2^{21} - 12144a_1^{21}a_3^{3} + 24288a_0^{2}a_1^{1}a_2^{14}a_3^{7} - 24288a_0^{7}a_1^{14}a_2^{1}a_3^{2} \\
&+ 30912a_0^{12}a_2^{12} - 30912a_1^{12}a_3^{12} + 36432a_0^{12}a_1^{5}a_2^{4}a_3^{3} - 36432a_0^{3}a_1^{4}a_2^{5}a_3^{12} \\
&+ 42504a_0^{8}a_1^{1}a_2^{8}a_3^{7} - 42504a_0^{7}a_1^{8}a_2^{1}a_3^{8} + 85008a_1^{5}a_2^{16}a_3^{3} - 85008a_0^{3}a_1^{16}a_2^{5} \\
&+ 97152a_0^{5}a_1^{1}a_2^{11}a_3^{7} - 97152a_0^{1}a_1^{5}a_2^{7}a_3^{11} + 97152a_0^{11}a_1^{7}a_2^{5}a_3^{1} - 97152a_0^{7}a_1^{11}a_2^{1}a_3^{5} \\
&+ 99176a_0^{6}a_2^{18} - 99176a_1^{18}a_3^{6} + 121440a_0^{11}a_1^{4}a_2^{5}a_3^{4} - 121440a_0^{4}a_1^{5}a_2^{4}a_3^{11} \\
&+ 121440a_0^{9}a_1^{2}a_2^{7}a_3^{6} - 121440a_0^{6}a_1^{7}a_2^{2}a_3^{9} + 121440a_0^{9}a_2^{15} - 121440a_1^{15}a_3^{9} \\
&+ 161920a_0^{1}a_1^{3}a_2^{15}a_3^{5} - 161920a_0^{5}a_1^{15}a_2^{3}a_3^{1} + 178112a_0^{10}a_1^{3}a_2^{6}a_3^{5} - 178112a_0^{5}a_1^{6}a_2^{3}a_3^{10} \\
&+ 267168a_0^{9}a_1^{8}a_2^{7} - 267168a_1^{7}a_2^{8}a_3^{9} + 364320a_0^{3}a_1^{2}a_2^{13}a_3^{6} - 364320a_0^{6}a_1^{13}a_2^{2}a_3^{3} \\
&+ 655776a_0^{10}a_1^{6}a_2^{6}a_3^{2} - 655776a_0^{2}a_1^{6}a_2^{6}a_3^{10} + 655776a_0^{6}a_1^{2}a_2^{10}a_3^{6} - 655776a_0^{6}a_1^{10}a_2^{2}a_3^{6} \\
&+ 680064a_0^{1}a_1^{6}a_2^{15}a_3^{2} - 680064a_0^{2}a_1^{15}a_2^{6}a_3^{1} + 850080a_0^{3}a_1^{8}a_2^{13} - 850080a_1^{13}a_2^{8}a_3^{3} \\
&+ 1457280a_0^{2}a_1^{7}a_2^{14}a_3^{1} - 1457280a_0^{1}a_1^{14}a_2^{7}a_3^{2} + 1493712a_0^{6}a_1^{8}a_2^{10} - 1493712a_1^{10}a_2^{8}a_3^{6} \\
&+ 1578720a_0^{2}a_1^{4}a_2^{14}a_3^{4} - 1578720a_0^{4}a_1^{14}a_2^{4}a_3^{2} + 1845888a_0^{9}a_1^{5}a_2^{7}a_3^{3} - 1845888a_0^{3}a_1^{7}a_2^{5}a_3^{9} \\
&+ 1845888a_0^{7}a_1^{3}a_2^{9}a_3^{5} - 1845888a_0^{5}a_1^{9}a_2^{3}a_3^{7} + 2404512a_0^{4}a_1^{3}a_2^{12}a_3^{5} - 2404512a_0^{5}a_1^{12}a_2^{3}a_3^{4} \\
&+ 2428800a_0^{8}a_1^{7}a_2^{8}a_3^{1} - 2428800a_0^{1}a_1^{8}a_2^{7}a_3^{8} + 2610960a_0^{8}a_1^{4}a_2^{8}a_3^{4} - 2610960a_0^{4}a_1^{8}a_2^{4}a_3^{8} \\
&+ 5829120a_0^{3}a_1^{5}a_2^{13}a_3^{3} - 5829120a_0^{3}a_1^{13}a_2^{5}a_3^{3} + 6509184a_0^{5}a_1^{7}a_2^{11}a_3^{1} - 6509184a_0^{1}a_1^{11}a_2^{7}a_3^{5} \\
&+ 7164960a_0^{5}a_1^{4}a_2^{11}a_3^{4} - 7164960a_0^{4}a_1^{11}a_2^{4}a_3^{5} + 7504992a_0^{7}a_1^{6}a_2^{9}a_3^{2} - 7504992a_0^{2}a_1^{9}a_2^{6}a_3^{7} \\
&+ 9512800a_0^{4}a_1^{6}a_2^{12}a_3^{2} - 9512800a_0^{2}a_1^{12}a_2^{6}a_3^{4} + 10565280a_0^{6}a_1^{5}a_2^{10}a_3^{3} - 10565280a_0^{3}a_1^{10}a_2^{5}a_3^{6}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[Ab] T. Abe, Fusion Rules for the Charge Conjugation Orbifold, Preprint.

[BDHO] E. Bannai, S.T. Dougherty, M. Harada, and M. Oura, Type II Codes, Even Unimodular Lattices, and Invariant Rings, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**, (1999), 1194-1205.

[Bo] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83**, (1986), 3068-3071.

[CS] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, Sphere Packing, Lattices and Groups, 3rd Edition, Springer, New York, 1999.

[DGH] C. Dong, R. L. Griess Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and moonshine module, *Comm. Math. Phys.*, **193**, (1998), 407-448.

[DHS] S. T. Dougherty, M. Harada and P. Solé, Self-dual codes over rings and the Chinese remainder theorem. *J. Math. Hokkaido Univ.* **28** (1999), 253-283.

[DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.*, **202**, (1999), 169-195.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, (1988).

[Ma] A. Matsuo, Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Larger Symmetry. Preprint.

[MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields, MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, (1999).

[Sh] H. Shimakura, Decomposition of the Moonshine Module with respect to a code over $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Preprint.